Chapitre 2

Dynamique du point matériel

Objectifs d'apprentissage

- Enoncer les 3 lois de Newton
- Exprimer et représenter sur un schéma les forces suivantes : force de gravitation, force de Coulomb, force de Lorentz, frottement visqueux, frottement solide dynamique
- Manipuler la 2ème loi de Newton en coordonnées cartésiennes, polaires et cylindriques https ://www.overleaf.com/project/5d02068a62922d77bfc9c429
- Définir la quantité de mouvement

La dynamique s'intéresse aux causes physiques (les forces) de la mise en mouvement d'un objet (système). Les trois lois du mouvements ont été énoncées par Isaac Newton (1642-1727), fondateur de la mécanique classique (dite aussi "Newtonienne"), et publiées en 1687 dans son ouvrage : *"Philosophiae naturalis principia mathematica"*. Nous resterons dans le cadre de la mécanique classique non relativiste où la vitesse des objets reste bien inférieure à la vitesse de la lumière. Ici, nous allons présenter les trois lois de Newton pour un point matériel, c'est-à-dire système qu'il est possible de modéliser par un point géométrique M auquel est associée sa masse m.

Un petit point d'histoire des sciences : Emilie du Châtelet et la théorie de Newton en France

Émilie Du Châtelet (1706-1749) est un maillon clé de la diffusion de la pensée de Newton en France. Elle commenta et traduisit (1759) les Principia mathematica (1687) du latin en français et surtout transposa le langage euclidien de Newton dans le langage analytique codifié par Leibniz. Elle a été pendant plus d'une quinzaine d'année la compagne de Voltaire grâce à qui elle découvrit les travaux de Newton alors qu'il revenait d'un voyage en Angleterre. Hypermotivée, elle a appris la physique auprès de Maupertuis et Clairaut et les mathématiques de Leibniz auprès de l'Allemand Samuel Koenig.

2.1 Première loi de Newton : le principe d'inertie

Notons que lorsqu'un point matériel ne subit aucune action (interaction, force) venant de l'extérieur, on dit que ce point matériel est **isolé**. On dit qu'il est **pseudo-isolé** lorsque la somme des forces qui s'appliquent sur lui est nulle.

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

Remarque : sur Terre, il n'existe pas de système isolé au sens strict, puisque tout objet est soumis à l'action de la pesanteur.

Énoncé du principe d'inertie

Il existe des référentiels privilégiés, appelés galiléens ou inertiels, dans lesquels un point matériel isolé est soit au repos, soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

Le principe d'inertie ne régit que le mouvement du centre d'inertie d'un corps (donc d'un point matériel). Par exemple, si un hockeyeur frappe un palet qui glisse sur la glace sans frottement celui-ci peut avoir un mouvement de rotation mais son centre d'inertie décrira une trajectoire rectiligne uniforme.

Définitions

- Un point matériel présente un mouvement rectiligne uniforme si sa trajectoire est une droite ; sa vitesse est de norme constante et son accélération est nulle.

$$v = ||\vec{v}|| = cst \quad \text{et} \quad a = 0$$

- Un référentiel est dit **galiléen** lorsque dans celui-ci le principe d'inertie s'applique.

Si le principe d'inertie s'applique dans un référentiel $\mathcal{R}$ alors celui-ci est dit galiléen. Comme on a pu le voir dans le chapitre précédent sur les changements de référentiel, tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ est également galiléen.

Ce principe est vérifié si on choisit un référentiel lié au centre de masse du système solaire et à trois étoiles fixes : **le référentiel de Copernic**. Il est utilisé comme référentiel galiléen lorsque les expériences terrestres sont longues, c'est-à-dire que l'on ne peut plus négliger la rotation de la Terre. Lors d'expérience de laboratoire, inférieure à la période de rotation de la Terre ($<$ 24h), **le référentiel terrestre** sera considéré approximativement comme inertiel (galiléen).

2.2 Deuxième loi de Newton : le principe de la dynamique

2.2.1 Le principe fondamental de la dynamique

La deuxième loi de Newton ou principe fondamental de la dynamique (PFD) établit la relation liant les interactions entre l'extérieur et le point matériel (les forces) et la cinématique de celui-ci (accélération). En principe il permet de déterminer le mouvement d'un point matériel ainsi que la position et la vitesse initiales, si on connaît toutes les forces qui lui sont appliquées. La somme de toutes ces forces est appelée résultante des forces extérieures agissant sur le point matériel.

Énoncé du PFD

Dans un référentiel galiléen un point matériel de masse m soumis à une résultante des forces $\vec{F}$ possède une accélération $\vec{a}$ telle que : $m\,\vec{a} = \vec{F}$

Cette loi implique que seule une action extérieure non compensée (une ou plusieurs forces) peut modifier la vitesse d'un objet.

2.2.2 La quantité de mouvement

Vecteur quantité de mouvement

Le principe fondamental de la dynamique introduit une nouvelle grandeur : **la quantité de mouvement** d'un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{v}$ donnée par :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

On la relie au principe fondamental de la dynamique via la résultante des forces $\vec{F}$ qui s'exercent sur le point matériel (m étant considérée constante) :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Il s'agit d'une forme équivalente au principe fondamental de la dynamique pour un point matériel (dont la masse ne change pas) mais elle présente l'avantage d'être généralisable à un système matériel quelconque.
Le vecteur quantité de mouvement dépend du référentiel dans lequel est exprimée la vitesse. Il s'exprime en kg.m.s^{-1}.

2.3 Troisième loi de Newton : le principe des actions réciproques

La troisième loi de Newton est aussi connue sous le nom de principe de l'action et de la réaction, ou principe des actions réciproques.

Énonce du principe des actions réciproques

Si un point matériel A exerce une force sur un point matériel B, alors le point matériel B exerce simultanément sur A une force d'intensité égale, de même direction, mais de sens opposé.

$$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}$$

Ces deux forces sont portées par la droite d'action (AB).

Par exemple : les forces d'interaction gravitationnelle entre deux masses m_1 et m_2 ou entre deux charges q_1 et q_2 (cf 2.5.1), la force de contact entre deux objets ...

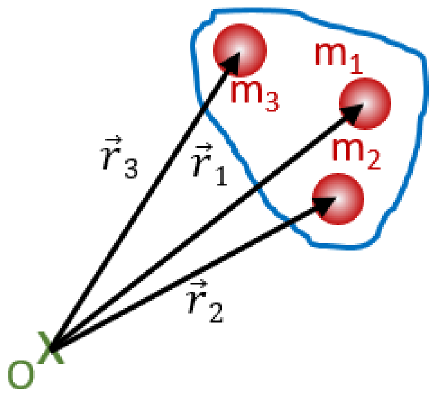
2.4 Mouvement du centre de masse d'un système

2.4.1 Définition d'un système

Définition

Un système $\mathcal{S}$ est un ensemble de points matériels qui interagissent entre eux et avec l'extérieur et dont le volume est défini. Par exemple, cet ensemble de 3 points matériels en rouge dont le volume est délimité par la courbe bleu.

Un système $\mathcal{S}$ défini par un ensemble de points matériels (m_1, m_2, ...) est repéré dans l'espace par les positions des différents points matériels au moyen des vecteurs ($\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, ...) et les vitesses par les vecteurs ($\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ...). Le système est complètement défini lorsque que l'on connaît les variables : m_i, $\vec{r}_i$ et $\vec{v}_i$.



2.4.2 Mouvement du centre de masse d'un système

Rappel : Pour un point matériel m soumis à plusieurs forces, la deuxième loi de Newton s'exprime dans le référentiel inertiel comme :

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

avec $\vec{F}$ la résultante des forces qui s'appliquent au point matériel.

Système de 2 points matériels

Considérons un système $\mathcal{S}$ composé de 2 points matériels m_1 et m_2 ayant pour positions $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ et pour vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, respectivement. Les forces $\vec{F}_1^{tot}$ et $\vec{F}_2^{tot}$ sont les résultantes des forces totales (forces externes et internes) qui s'exercent sur chacun des points matériels. Ces forces se décomposent de la façon suivante :

$$\vec{F}_1^{tot} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{21} \quad \text{et} \quad \vec{F}_2^{tot} = \vec{F}_2 + \vec{F}_{12}$$

avec $\vec{F}_{21}$ la force exercée par m_2 sur m_1 et $\vec{F}_1$ la résultante des forces appliquées sur m_1 ; on définit de manière similaire les forces sur m_2.

En faisant la somme vectorielle de la deuxième loi de Newton établie pour chaque point matériel, on obtient :

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_1^{tot} + \vec{F}_2^{tot} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}$$

D'après la troisième loi de Newton (principe des actions réciproques) : $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$
Le PFD d'un système de 2 points matériels s'exprime alors comme :

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = \frac{d}{dt}[m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2] = \vec{F}$$

avec $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

Introduisons la vitesse du centre de masse : $\vec{v}_G = \dfrac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$
On obtient :

$$\vec{F} = M\vec{a}_G = M\frac{d\vec{v}_G}{dt}$$

avec M la masse totale du système $(m_1 + m_2)$ et $\vec{a}_G = \dfrac{d\vec{v}_G}{dt}$ l'accélération du centre de masse.

Système de N points matériels

La généralisation du résultat précédent peut être obtenue simplement. Considérons un système de N points matériels, m_1, m_2, ... et m_N. De la même manière que précédemment, on écrit :

$$\vec{F}_1^{tot} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{21} + ... + \vec{F}_{N1}, \quad \vec{F}_2^{tot} = \vec{F}_2 + \vec{F}_{12} + ... + \vec{F}_{N2}, \quad ... \text{ et } \quad \vec{F}_N^{tot} = \vec{F}_N + \vec{F}_{1N} + \vec{F}_{2N} + ... + \vec{F}_{(N-1)N}$$

En sommant la deuxième loi de Newton et en utilisant la troisième loi pour chaque paire de points matériels, on obtient :

$$\vec{F} = M\vec{a}_G = M\frac{d\vec{v}_G}{dt}$$

avec :

$$M = m_1 + m_2 + ... + m_N, \quad \vec{v}_G = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ... + m_N\vec{v}_N}{m_1 + m_2 + ... + m_N} \quad \text{et} \quad \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_N$$

Équation du mouvement du centre de masse et généralisation du PFD

On obtient pour un système constitué d'un nombre quelconque N de points matériels, l'équation du mouvement du centre de masse d'un système

$$\vec{F}_{ext} = M\vec{a}_G = M\frac{d\vec{v}_G}{dt}$$

qui correspond à **la loi de la dynamique pour un système** avec :

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i, \quad \vec{v}_G = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i, \quad \vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

Théorème du centre d'inertie

Pour tout système $\mathcal{S}$ on peut associer un point matériel G *fictif* de masse M, le centre de masse, dont la position au cours du temps est définie par :

$$\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{OM}_i$$

Pour le cas d'un système isolé, c'est-à-dire ne subissant pas d'action extérieur ($\vec{F} = \vec{0}$), le système a un mouvement rectiligne uniforme (première loi de Newton)

Le centre de masse d'un système de points matériels se déplace comme si celui-ci était constitué d'un seul point matériel de masse égale à la masse totale du système soumis à la somme des forces extérieures agissant sur le système.

2.5 Les forces

La notion de force a été largement abordée dans l'UE Mécanique - Physique 1 (S1), ici, nous n'allons aborder que des forces qui n'ont été que peu ou pas vues au S1. Les forces sont les causes du mouvement non rectiligne uniforme et modélisent des interactions. Elles résultent de l'action d'un objet sur un autre par contact (pression, frottement visqueux, dynamique ...) ou à distance (force d'interaction gravitationnelle, électromagnétique, coulombienne...). Les forces sont modélisées par un vecteur exprimé aussi bien dans la base cartésienne liée au référentiel que dans une base locale (coordonnées polaires, cylindriques).

Comment connaît-on l'expression des forces ?

À partir du principe d'inertie qui stipule que la quantité de mouvement $\vec{p_t}$ d'un système isolé est conservée, on peut déduire que si une planète de masse m_1 subit une action extérieure de la part du soleil de masse m_2 alors sa quantité de mouvement varie au cours du temps. On a donc :

$$\frac{d\vec{p_t}}{dt} \neq \vec{0}$$

La dérivée d'un vecteur étant un vecteur, on peut définir un vecteur $\vec{F}$, appelé force exercée par le soleil sur la masse m_1, et écrire :

$$\frac{d\vec{p_t}}{dt} = \vec{F}$$

On peut alors étudier la trajectoire de la masse m_1 soumise à l'action de m_2. En calculant pour chaque point de la trajectoire la quantité $\frac{d\vec{p_t}}{dt}$, on découvre les propriétés du vecteur $\vec{F}$. On voit ainsi que $\vec{F}$ varie comme l'inverse du carré de la distance de la planète au soleil. Si on change de planète et que l'on considère que cette interaction à une nature universelle correspondant à l'interaction entre deux masses, on va s'apercevoir que $\vec{F}$ est proportionnel à la masse de la planète. Par symétrie du problème, puisqu'on a une masse en interaction avec une autre, on en déduit que $\vec{F}$ est également proportionnelle à la masse du soleil. Par ailleurs, on constate que $\vec{F}$ est dirigé de la planète vers le soleil en chaque point. On peut donc postuler l'existence d'une force universelle régissant l'interaction entre deux masses ayant la forme suivante :

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_{12}$$

où $\vec{F}_{1\to 2}$ (resp. $\vec{F}_{2\to 1}$) est la force exercée par la masse m_1 sur la masse m_2 (resp. m_2 sur m_1), r la distance entre les deux masses et $\vec{u}_{12}$ le vecteur unitaire allant de 1 vers 2. G est une constante qu'il faut alors mesurer sur un système particulier pour en connaître la valeur.
Notons que c'est le caractère universel de cette force qui nous permet d'inverser la logique pour postuler que deux autres masses m et M en interaction subiront une force de même nature. On obtient alors le mouvement de la masse m sous l'action de la masse M en résolvant l'équation :

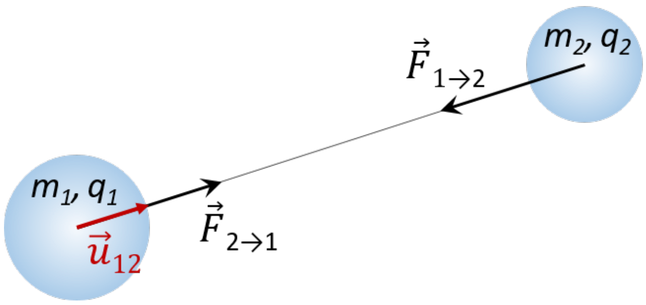
$$\frac{d\vec{p_t}}{dt} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{u}_{12}$$

L'inconnue est maintenant $\vec{p_t}$. On a maintenant une équation qui correspond à la seconde loi de Newton pour une force unique. Pour obtenir la seconde loi de Newton usuelle que vous avez énoncée au premier semestre, il faut postuler que si un système est soumis à un ensemble de forces extérieures, la force totale qu'il subit est la somme vectorielle de toutes ces forces, d'où son nom usuel de "Principe fondamental de la dynamique". Pour chaque autre force universelle, on procède de la même manière et on obtient ainsi sa modélisation vectorielle. Cette dernière connue, on peut ensuite être l'utiliser dans d'autres situations analogues via la seconde loi de Newton pour déterminer la loi du mouvement associée à ces nouvelles situations.

2.5.1 Forces d'interaction à distance

Force de gravitation

C'est en 1650, que Newton (*encore*) suppose que le mouvement de la Lune autour de la Terre a la même cause que la chute de corps sur la surface de la Terre. Il énonce donc qu'il existe une force d'attraction exercée par une masse m_1 sur une masse m_2 qui est d'autant plus forte que les masses sont grandes et que la distance entre celles-ci est petite. Cette force est nommée force d'interaction gravitationnelle ou de gravitation newtonnienne.



Énoncé : Force de gravitation

Les forces d'**interaction gravitationnelle** qui s'exercent entre deux points matériels de masse m_1 et m_2 sont portées par l'axe qui joint ces deux points, de même norme et de sens opposé (3e loi de Newton). Cette norme est proportionnelle au produit des deux masses et à l'inverse du carré de leur distance.

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_{12}$$

où $\vec{F}_{1\to 2}$ (resp. $\vec{F}_{2\to 1}$) est la force exercée par la masse m_1 sur la masse m_2 (resp. m_2 sur m_1), r la distance entre les deux masses et $\vec{u}_{12}$ le vecteur unitaire allant de 1 vers 2. G est la constante de gravitation universelle et vaut $G = 6,67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

Remarques :

- *Le signe moins $(-)$ explicite le caractère attractif de la force.*
- *La force de gravitation vérifie le principe des actions réciproques car seul change le vecteur unitaire en inversant le rôle de 1 et 2, $\vec{u}_{21} = -\vec{u}_{12}$.*
- *Il s'agit de forces centrales car portées par la droite joignant les deux points matériel.*

Cas particulier : la force de pesanteur sur la Terre

Un cas particulier mais important de la force de gravitation est celle qui s'exerce sur un objet au voisinage de la surface de la Terre, elle est appelé force de pesanteur. Dans ce cas la masse m_1 est la masse de la Terre ($M_T = 5,972.10^{24}$ kg) et la masse m_2 celle du corps (m) au voisinage de sa surface. **La force gravitationnelle exercé par la Terre sur ce corps représente le poids de celui-ci :**

$$\vec{F}_{M\to m} = m\vec{g} = -G\frac{M_T m}{R_T^2}\vec{u}_z$$

avec R_T ($= 6371$ km) le rayon de la Terre (objet à la surface de la Terre), $\vec{g}$ vecteur, accélération de la pesanteur dirigé vers le bas.

$$\text{Soit } \vec{g} = -G\frac{M_T}{R_T^2}\vec{u}_z \text{ d'où } ||\vec{g}|| = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$$

Force d'interaction coulombienne

L'interaction coulombienne ou force électrostatique est l'analogue de l'interaction gravitationnelle. Cette fois-ci au lieu de considérer deux masses distinctes, considérons deux particules chargées électriquement q_1 et q_2.

Énoncé : Force d'interaction coulombienne

La force de Coulomb, ou force électrostatique est la force qu'exercent l'une sur l'autre deux charges électriques. Si les deux charges ont le même signe l'interaction est répulsive, si elles sont de signe opposé l'interaction est attractive. La force d'interaction d'une charge q_1 sur une charge q_2 à une distance r, s'écrit :

$$\vec{F}_{1\rightarrow 2} = -\vec{F}_{2\rightarrow 1} = K\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_{12}$$

où $\vec{F}_{1\rightarrow 2}$ (resp. $\vec{F}_{2\rightarrow 1}$) est la force exercée par la charge q_1 sur la charge q_2 (resp. q_2 sur q_1) dans le champ électrique, r la distance entre les deux charges, $\vec{u}_{12}$ le vecteur unitaire allant de 1 vers 2 et $K = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}$ la constante d'interaction coulombienne avec ϵ_0, la constante de permittivité du vide valant $\epsilon_0 = 8,854.10^{-12}$ F m^{-1}, d'où $K = 9.10^9$ m F^{-1}.

Cette interaction n'existe que sous certaines conditions : dans le vide, les charges 1 et 2 doivent être immobile ou alors se déplacer lentement, c'est à dire que la norme de leurs vitesses est faible par rapport à celle de la lumière.

Y a-t-il des forces d'actions à distance ?

Les forces précédentes introduites en mécanique newtonnienne sont des forces qui décrivent des actions à distance et instantanées. Plusieurs théoriciens se sont élevés contre un tel concept car ils ne concevaient pas qu'un objet puisse interagir à distance sur un autre sans le toucher. Cette critique est devenue plus importante à la fin du XIXème siècle quand on a découvert que rien n'allait plus vite que la lumière et qu'une action instantanée était un problème. Pour résoudre cette contradiction, les théories modernes des interactions décrivent les interactions comme l'échange de particules qui se déplacent au mieux à la vitesse de la lumière d'une masse à l'autre. La source d'interaction émet une telle particule en lui transférant de la quantité de mouvement qui est ensuite transférée à la seconde masse quand elle absorbe cette particule virtuelle.

Force de Lorentz

Énoncé : Force d'interaction électromagnétique

La force de Lorentz ou force d'interaction électromagnétique est la force que subit une particule chargée électriquement (q) animée d'une vitesse $\vec{v}$ placée dans des champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$. Cette force s'écrit :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse de la particule chargée dans le référentiel où $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont mesurés.

2.5.2 Forces de frottement

Les forces de frottement sont des forces de contact tout comme la tension du fil ou la réaction du support qui lors d'un mouvement non rectiligne ne sont pas toujours constantes (surface courbe). Ces forces de frottements apparaissent lorsque deux matériaux sont en contact et que l'on cherche à en mettre un en mouvement ou lorsque que celui-ci se déplace. On distingue deux types de frottement les frottement visqueux (ex :une bille dans de l'huile) et les frottements solide (contact solide-solide ex : une caisse sur un plan incliné).

Frottement visqueux

Définition du frottement visqueux

Lorsqu'un corps ou point matériel se déplace dans un fluide (liquide comme l'eau ou gazeux comme l'air), celui-ci subit une force de frottement de la part du fluide résultant de multiples interactions avec les atomes du fluide. Cette résultante est de sens opposé à la vitesse relative de l'objet par rapport au support et de norme proportionnelle à la réaction normale.

Expression des frottements visqueux

Lors de frottement visqueux nous pouvons distinguer deux régimes qui dépendent de la vitesse du corps/point matériel dans le fluide. Les deux régimes se distinguent par une vitesse modérée ou une vitesse élevée du corps/ point matériel (les deux cas seront explicités plus précisément dans le chapitre dynamique des fluides).

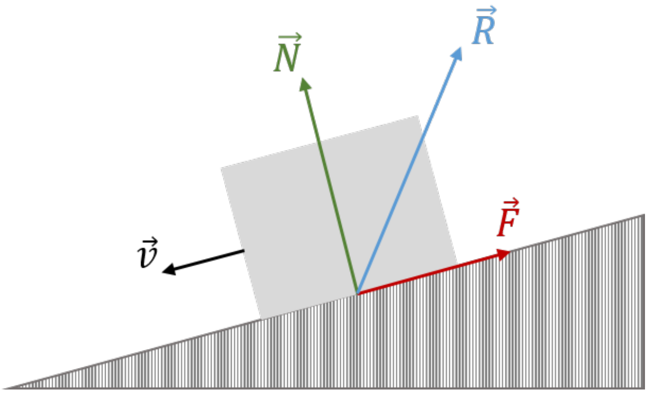
- **Vitesse relative faible à modérée.** L'écoulement du fluide autour du corps est stable dans le temps et régulier dans l'espace. La force de frottement visqueuse est modélisée par :
$$\vec{F} = -\alpha\eta\vec{v}$$
où α est le coefficient positif qui dépend de la forme du corps, η le coefficient de viscosité qui dépend de la nature du fluide et $\vec{v}$ le vecteur vitesse du corps/point matériel.
- **Vitesse relative élevée.** L'écoulement du fluide autour du corps est irrégulier dans le temps et complexe dans l'espace. La force de frottement visqueuse peut être alors appelée force de traînée et est modélisée par :
$$\vec{F} = -\beta v^2\vec{u}$$
où β est le coefficient positif qui dépend de la forme du corps et de la masse volumique du fluide, v la norme de la vitesse du corps/point matériel et $\vec{u}$ le vecteur unitaire dans la direction de la vitesse.

Frottement solide dynamique

Dès que l'on cherche à faire glisser un solide sur un autre solide une force de frottement apparaît tangentielle à la surface de contact. Sous l'action de forces extérieures qui cherchent à faire bouger ce corps, celui-ci peut se mettre en mouvement ou rester immobile si les forces de frottement le permettent. Dans ce dernier cas la réaction du support $\vec{R}$ et la force de frottement $\vec{F}$ s'adaptent pour maintenir l'équilibre (**frottement statique**), sinon le corps se déplacera en subissant une force de frottement $\vec{F}$ constante opposée au mouvement (**frottement dynamique**). Dans les deux cas, la réaction du support $\vec{R}$ se décompose en deux composantes, l'une normale au support $\vec{N}$ (qui empêche le solide de s'enfoncer dans le support) et en une force $\vec{F}$ parallèle au support qui s'oppose au mouvement.

Définition frottement solide dynamique

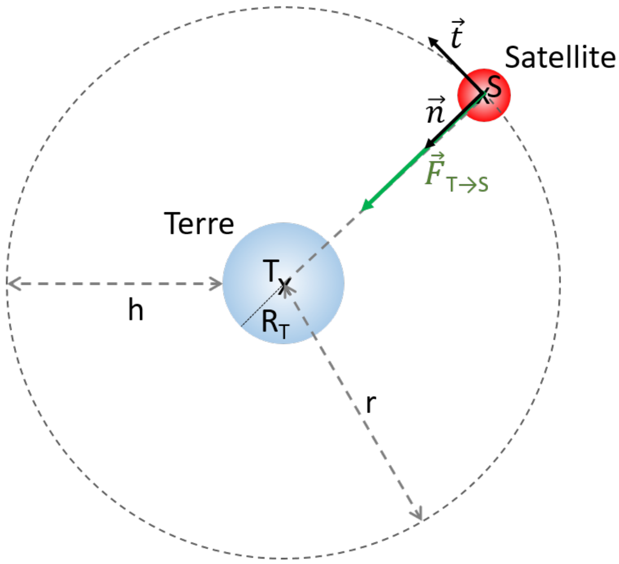
Si l'un des deux solides glisse sur l'autre avec une vitesse $\vec{v}$, il subit une force de frottement dynamique de sens opposé à $\vec{v}$ et de norme :
$$F = \mu_d N$$
avec μ_d le coefficient de frottement dynamique dépendant de la nature des deux matériaux et N la norme de la composante normale de $\vec{R}$ (soit la force de contact entre les deux solides).



2.6 Exemples d'application

2.6.1 Le satellite géostationnaire

On étudie le mouvement d'un satellite S assimilé à une masse ponctuelle m_S décrivant une orbite circulaire autour de la Terre à une altitude h. La Terre est assimilée à une sphère homogène de masse M_T et de rayon R_T.



1. (a) Dans quel référentiel étudie-t-on le mouvement d'un satellite géostationnaire ?
   (b) Dans quel référentiel un tel satellite est-il immobile ? Quel est donc le plan de l'orbite ? En quoi la base de Kourou est-elle « intéressante » pour la mise en poste de tels satellites ?
2. Montrer que le mouvement du satellite est uniforme.
3. Établir les expressions de la vitesse v et de la période T du satellite en fonction de son altitude h. Le mouvement du satellite est-il dépendant de sa masse ?
4. Exprimer et calculer l'altitude h à laquelle doit se trouver le satellite pour qu'il soit géostationnaire.

Données : Masse de la Terre : M_T= 5,98.10^{24} kg, Rayon de la Terre : R_T= 6,37.10^6 m, constante de gravitation : G = 6,67.10^{-11} m. kg^{-1}.s^{-2}

CORRECTION :

1. (a) On étudie le satellite géostationnaire dans le référentiel géocentrique supposé galiléen.
   (b) Un satellite géostationnaire est un satellite immobile pour un observateur à la surface de la Terre. Sa période de révolution T est donc égale à la période de rotation de la Terre sur

elle-même. Le plan de l'orbite est le plan de l'équateur. C'est à cet endroit que la vitesse de rotation de la terre sur elle-même est la plus grande, (on y récupère le maximum d'énergie cinétique lors du lancement du satellite). La base de Kourou est intéressante car elle est située justement à l'équateur.

2. Montrer que le mouvement du satellite est uniforme.
   - Système : Le satellite S
   - Référentiel : géocentrique suppose galiléen dans la base de Frenet.
   - Forces extérieures appliquées au satellite : La force d'attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur le satellite :
   $$\vec{F}_{T\to S} = G\frac{M_T m_S}{r^2}\vec{u_\rho}$$
   avec r la distance entre le centre de la Terre et le satellite. Attention, ici le vecteur unité n'est pas $\vec{u}_{TS}$ mais $\vec{u_\rho} = -\vec{u}_{TS}$.
   - D'après la deuxième loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{F}$. Dans la base de Frenet l'accélération à deux composantes, une normale et une tangentielle à la trajectoire $\vec{a} = a_\rho\vec{u_\rho} + a_\theta\vec{u_\theta}$.
   - Soit
   $$\vec{F}_{T\to S} = m_S\vec{a} = G\frac{M_T m_S}{r^2}\vec{u_\rho}$$
   l'accélération n'a donc qu'une composante normale selon $\vec{u_\rho}$, l'accélération n'a pas de composante tangentielle $a_\theta = 0 = \dfrac{dv}{dt}$ donc la valeur de la vitesse du satellite v est constante (la vitesse est tangentielle à la trajectoire). **Le mouvement est donc circulaire uniforme.**

3. Pour établir l'expression de la vitesse v du satellite on projette l'accélération $\vec{a}$ sur $\vec{u_\rho}$:

$$m_S a_\rho = -G\frac{M_T m_S}{r^2}$$

$$\text{donc} \quad a_\rho = G\frac{M_T}{r^2}$$

Comme vu au chapitre **??** l'accélération normale est : $a_\rho = \dfrac{v^2}{r}$, donc :

$$\frac{v^2}{r} = -G\frac{M_T}{r^2}$$

d'où :

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$

or r est la distance entre le centre de la Terre et le satellite donc $r = R_T + h$ donc :

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}}}$$

L'expression de la vitesse est indépendante de la masse du satellite donc son mouvement l'est aussi.
La période T de révolution du satellite est la durée mise par le satellite pour faire un tour, c'est-à-dire pour parcourir le cercle de rayon r. Elle est donc égale à la circonférence de l'orbite (périmètre du cercle de rayon r) soit $2\pi r = 2\pi(R_T + h)$ divisé par la vitesse de rotation du satellite v.

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM_T}{r}}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_T}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{GM_T}}}$$

4. Pour que le satellite soit géostationnaire il faut que sa période de révolution soit égale à celle de la Terre : $T = 23\text{h}56\text{min} = 8,62.10^4$ s.

   On extrait tout d'abord r^3 de l'expression de la période T. Soit $T^2 = 4\pi^2 \dfrac{r^3}{GM_T}$, d'où :

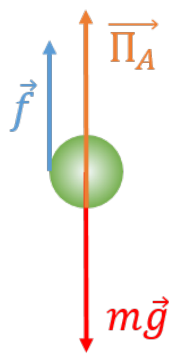
$$r^3 = \frac{T^2 GM_T}{4\pi^2} = (R_T + h)^3 \quad \text{soit} \quad R_T + h = \left(\frac{T^2 GM_T}{4\pi^2}\right)^{3/2}$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{h = \left(\frac{T^2 GM_T}{4\pi^2}\right)^{3/2} - R_T = 35\ 800 \text{ km}}$$

Remarque : Du fait de l'immobilité apparente des satellites géostationnaires, il est facile de «les viser» pour leur envoyer des ondes à transmettre ou pour recueillir le ondes qu'ils réfléchissent. Ils servent de relais entre un point de l'hémisphère nord et un point de l'hémisphère sud. Ils sont utilisés pour la transmission des ondes radio ou de télévision.

2.6.2 Chute visqueuse de bille dans un train

On considère la chute verticale d'une bille dans un fluide visqueux lâchée sans vitesse initiale d'une hauteur h du sol d'un train muni d'un référentiel $\mathcal{R}'$. Le train est animé d'un mouvement rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}$. On suppose qu'à $t = 0$, les origines des deux référentiels coïncident et se situent au niveau du sol du train.



1. Déterminer l'expression de la vitesse de la bille dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du train.
2. Déterminer l'équation de la trajectoire de la bille dans le référentiel $\mathcal{R}$ du quai.

CORRECTION :

1. - Référentiel : $\mathcal{R}'$, le train. *Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est galiléen (principe d'inertie).* Le train ($\mathcal{R}'$) étant en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au quai $\mathcal{R}$, référentiel terrestre supposé galiléen alors $\mathcal{R}'$ est un référentiel dit galiléen.
   - Système : bille
   - Bilan des forces extérieures sur la bille :
     - le poids de la bille : $m\vec{g}$
     - la poussée d'Archimède exercée par le fluide visqueux : $\vec{\Pi}_A = -\rho_{fluide} V \vec{g}$
     - la viscosité du fluide (s'oppose au mouvement) : $\vec{f} = -\alpha\eta\vec{v}$

- Application du PFD : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{\Pi}_A + \vec{f}$

Chute verticale dirigée vers les $z < 0$ selon $\vec{u}_z$. Dans $\mathcal{R}'$ la bille n'a pas de mouvement selon $\vec{u}_x$. Projection des forces selon $\vec{u}_z$:

- $m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$
- $\vec{\Pi}_A = \rho_{fluide} V g \vec{u}_z$
- $\vec{f} = \alpha\eta v_z \vec{u}_z$ avec $\vec{v} = -v_z\vec{u}_z$

d'où

$$-mg + \rho_{fluide} V g + \alpha\eta v_z = ma_z = -m\frac{dv_z}{dt}$$

On obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{\alpha\eta}{m} v_z + g - \frac{\rho_{fluide} V g}{m}$$

Équation différentielle avec solution de la forme : $v_z = A + Be^{-\beta t}$ avec $\dfrac{dv_z}{dt} = -B\beta e^{-\beta t}$

$-B\beta e^{-\beta t} = -\dfrac{\alpha\eta}{m}(A + Be^{-\beta t}) + g - \dfrac{\rho_{fluide} V g}{m}$

$-B\beta e^{-\beta t} = -\dfrac{\alpha\eta}{m} A - \dfrac{\alpha\eta}{m} Be^{-\beta t} + g - \dfrac{\rho_{fluide} V g}{m}$

Par identification :

$\boxed{\beta = \dfrac{\alpha\eta}{m}}$

et $\quad -\dfrac{\alpha\eta}{m} A + g - \dfrac{\rho_{fluide} V g}{m} = 0$ donc $\boxed{A = \dfrac{mg - \rho_{fluide} V g}{\alpha\eta}}$

Pour trouver B utilisons les conditions initiales à t=0, $v_z(0) = 0$ donc $v_z(0) = A + B = 0$ d'où :

$v_z(0) = \dfrac{mg - \rho_{fluide} V g}{\alpha\eta} + B = 0$ donc $\boxed{B = -\dfrac{mg - \rho_{fluide} V g}{\alpha\eta}}$

La solution générale de l'équation différentielle donnant l'expression de la vitesse est :

$$\boxed{v_z(t) = \frac{mg - \rho_{fluide} V g}{\alpha\eta}\left(1 - e^{\frac{-\alpha\eta}{m} t}\right)}$$

2. Cette fois-ci dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ du quai, le train est animé d'un mouvement horizontal selon $\vec{u}_x$ de translation uniforme, c'est-à-dire que la vitesse du train v_x par rapport à $\mathcal{R}$ est constante : $v^x_{t/\mathcal{R}} = cste$ $(a^x_{t/\mathcal{R}} = 0)$ et $v^z_{t/\mathcal{R}} = 0$. Dans $\mathcal{R}$, la bille possède donc une composante selon $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$.

   Application du PFD :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$-mg\vec{u}_z + \rho_{fluide} V g \vec{u}_z + \alpha\eta v_z \vec{u}_z = m(a_x\vec{u}_x - a_z\vec{u}_z)$$

   $a_x(t) = 0$
   $a_z(t) = mg - \rho_{fluide} V g - \alpha\eta v_z$

   $v_x(t) = v^x_{t/\mathcal{R}} = cste$

   $v_z(t) = \dfrac{mg - \rho_{fluide} V g}{\alpha\eta}\left(1 - e^{\frac{-\alpha\eta}{m} t}\right)$

$$x(t) = v^x_{t/\mathcal{R}} t + x_0(t=0)$$
$$z(t) = \frac{mg - \rho_{fluide} V g}{\alpha\eta} \left(t + \frac{m}{\alpha\eta} e^{\dfrac{-\alpha\eta}{m} t} \right) + z_0$$

soit l'équation de la trajectoire avec $t = \dfrac{x(t)}{v^x_{t/\mathcal{R}}}$:

$$\boxed{z(t) = \frac{mg - \rho_{fluide} V g}{\alpha\eta} \left(\frac{x(t)}{v^x_{t/\mathcal{R}}} + \frac{m}{\alpha\eta} e^{\dfrac{-\alpha\eta}{m\ v^x_{t/\mathcal{R}}} x(t)} \right) + z_0}$$

2.7 Annexe

annexe : brève discussion sur les limites de la mécanique classique (universalité du temps, espace euclidien, caractère déterministe, caractère galiléen des référentiels) annexe : énoncé historique des lois de Newton annexe (?) : interactions fondamentales, point de vue du physicien

2.7.1 La masse inertielle - la masse pesante

La masse pesante ou masse grave m_g caractérise la force d'attraction gravitationnelle que génère la masse de cet objet sur tous les autres objets de l'univers. Elle est donc une mesure de la capacité d'un objet à interagir avec un champ de gravitation. Elle caractérise la force de gravitation (cf 2.5.1) alors que la masse inertielle modifie une accélération. Elles interviennent donc chacune de part et autre de l'égalité dans l'une équation de la dynamique.
Einstein a posé l'équivalence (pas l'égalité) de ces deux masses dans son "principe d'équivalence", postulat de base de la relativité générale. Eötvös l'a montré expérimentalement au début du XX$^{\text{eme}}$ siècle, elles sont équivalentes à 3.10^{-11} près.

D'un point de vue pratique, votre masse inertielle est celle qui va vers l'avant quand le métro freine brusquement, votre masse pesante est celle de votre poids sur la balance.

2.7.2 Quantité de mouvement d'un système

Quantité de mouvement d'un système

Si on considère un système matériel composé de N points matériels de masse m_i, on peut écrire le PFD pour chacun de ces objets $\vec{F_i} = \dfrac{d\vec{p_i}}{dt}$. En faisant la somme de toutes ces quantités de mouvement, on obtient :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p_t}}{dt}$$

où $\vec{p_t} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p_i} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v_i}$ est la quantité de mouvement totale du système et $\vec{F}$ la résultante de toutes les forces qui s'exercent sur chaque élément du système. Il s'agit aussi bien des forces extérieures que des forces intérieures au système. Les forces intérieures se compensent de sorte que $\vec{F}$ se réduit à la résultante des forces extérieures au système.

Forme générale du principe fondamental de la dynamique

On peut également obtenir la généralisation de la deuxième loi de Newton en utilisant la quantité de mouvement d'un système.
Comme définie précédemment, dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement totale ($\vec{p_t}$) d'un système matériel est égale à la résultante des forces extérieurs qui

s'exercent sur le système ($\vec{F}$) : $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}_t}{dt}$. Il s'agit de la forme générale du PFD qui présente l'avantage d'être valide pour n'importe quel système $\mathcal{S}$ composé de plusieurs éléments. Il peut être déformable mais également voir sa masse varier au cours du temps.

Généralisation du PFD via la quantité de mouvement

En introduisant l'expression du centre de masse G du système : $M\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i$, avec $M = \sum_i m_i$ la masse totale du système, que l'on dérive en suite par rapport au temps, on obtient :

$$M\vec{v}_G = \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{p}_t$$

D'où l'expression du PFD généralisé :

$$M\frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{F}$$

interprétation : pour un système composé de plusieurs objets, le mouvement de son centre de masse/gravité est identique à celui d'un seul point matériel, où serait concentrée la masse totale du système et où seraient appliquées toutes les forces extérieures s'exerçant sur le système.